УДК 517.956.2

А. Ф. Тедеев

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

В работе изучаются качественные свойства однородной задачи Дирихле для уравнения вида

$$\sum_{|\alpha|=m} (-1)^m D^\alpha A_\alpha (x, u, Du, \ldots, D^m u) = 0$$

в области $\Omega \subset R^n$, $n \geqslant 2$, с некомпактной границей. Здесь функции $A_\alpha (x, \xi)$ удовлетворяют следующим структурным условиям:

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha (x, \xi)\, \xi_\alpha \geqslant \nu_1 |\xi^m|^p, \quad p > 1, \quad m \geqslant 1,$$

$$|A_\alpha (x, \xi)| \leqslant \nu_2 |\xi^m|^{p-1}.$$

Предлагается простой способ доказательства принципа Сен-Венана.

1. Пусть $\Omega \subset R^n$, $n \geqslant 2$,— неограниченная область, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$. Для произвольного целочисленного мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, примем обозначения

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad D^j u = D^\alpha u, \quad |\alpha| = j.$$

Рассмотрим в Ω уравнение вида

$$\sum_{|\alpha|=m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha (x, u, Du, \ldots, D^m u) = 0, \quad m \geqslant 1. \tag{1}$$

Здесь $A_\alpha (x, \xi)$, $x \in \Omega$, $\xi = (\xi^0, \xi^1, \ldots, \xi^m)$, $\xi^i = (\xi^i_\alpha)$, $|\alpha| = i$, удовлетворяют условию Каратеодори и, кроме того, для почти всюду (п. в.) $x \in \Omega$ и всех $\xi \in R^1 \times R^n \times \ldots \times R^{(mn)}$ удовлетворяют оценкам

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha (x, \xi)\, \xi^m_\alpha \geqslant \nu_1 |\xi^m|^p, \quad p > 1, \tag{2}$$

$$|A_\alpha (x, \xi)| \leqslant \nu_2 |\xi^m|^{p-1}, \tag{3}$$

где ν_1, ν_2 — положительные постоянные. Пусть $\Omega \subset R^n_+ = \{x \in R^n,\ x_n > 0\}$. Предположим, что $\forall\, t > t_0 > 0$, $S_t = \Omega \cap \{x_n = t\} \neq \varnothing$. Обозначим $\Omega_t = \Omega \cap \{t_0 < x_n < t\}$. Для произвольного $\Gamma \subset \partial\Omega_t$ обозначим через $\overset{\circ}{W}{}^m_p (\Omega_t, \Gamma)$ замыкание в норме $W^m_p (\Omega_t)$ множества функции из $C^\infty (\Omega_t)$, обращающихся в нуль в окрестности $\partial\Omega_t \setminus \Gamma$.

Под обобщенным решением (о. р.) однородной задачи Дирихле в Ω понимается функция $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^m_p (\Omega_t, S_t)$ при всех $t > t_0$ и удовлетворяющая для любой функции $\varphi(x) \in \overset{0}{W}{}^m_p(\Omega_t)$ интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, u, Du, \ldots, D^m u) D^\alpha \varphi dx = 0. \tag{4}$$

Основная цель данной работы — исследование поведения о. р. задачи Дирихле для уравнения (1) на бесконечности в зависимости от геометрии области. Качественному исследованию решений краевых задач для эллиптических уравнений методом энергетических оценок, выражающих принцип Сен-Венана в теории упругости, посвящены многие работы (см. [1, 2] и литературу в них). Отметим работы [3—5], в которых разными методами изучаются вопросы качественной теории для линейных уравнений высокого порядка. Метод срезающих функций Хопфа применительно к качественному исследованию решений квазилинейных уравнений высокого порядка рассматривается в [6]. В предлагаемой ниже методике получения энергетических оценок используются подходы работы [7].

2. Введем численную характеристику области Ω, определяемой на сечениях S_t следующим образом:

$$\lambda_p^p(t) \equiv \inf_{g(x)\in \overset{0}{C}{}^\infty(S_t)} \left(\int\limits_{S(t)} |D_s g|^p ds \right) \left(\int\limits_{S(t)} |g|^p ds \right)^{-1}, \tag{5}$$

где D_s — касательная составляющая $D = (D_{x_1}, \ldots, D_{x_n})$ к поверхности S_t. Введем обозначения:

$$\sup_{t_0 < x_n < t} (\lambda_p(x_n))^{-j} = \mathcal{A}_j(t),$$

$$C_j = \sum_{l=1}^{m} |K_{jlm}|, \quad K_{jlm} = b_j^l \prod_{k=1}^{l} (m - k + 1),$$

где b_j^l — биномиальные коэффициенты. Пусть далее

$$\forall \varepsilon > 0 : 1 - \sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon^{\frac{m}{m-j}} \frac{(m-j)}{m} > 0,$$

$$\min \left\{ \frac{\sum\limits_{j=1}^{m-1} (\nu_3 C_j \mathcal{A}_j(t) \varepsilon^{-1})^{\frac{m}{j}} \frac{j}{m} + \nu_3 C_m \mathcal{A}_m(t)}{1 - \sum\limits_{j=1}^{m-1} \varepsilon^{\frac{m}{m-j}} \frac{(m-j)}{m}} \right\} = \Phi(t),$$

$$\nu_3 = \nu_2 / \nu_1.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. (Аналог принципа Сен-Венана.) Пусть $u(x)$ — о. р. однородной задачи Дирихле для уравнения (1) в Ω и выполнены условия (2), (3). Тогда $\forall\, t_1, t_2 : 0 < 2t_0 < t_1 < t_2$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega_{t_1/2}} |D^m u|^p dx \leqslant \frac{2}{t_1} (\Phi(t_2))^{\frac{1}{m}} \exp\left(- \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{(\Phi(t))^{1/m}} \right) \int\limits_{\Omega_{t_2}} |D^m u|^p dx. \tag{6}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} (t - x_n)^m u(x) & \text{при } t > x_n, \\ 0 & \text{при } t \leqslant x_n, \end{cases}$$

которая принадлежит пространству $\overset{0}{W}{}^m_p(\Omega_t)$. Подставляя ее в интегральное тождество (4) в роли пробной функции, получаем

$$\int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, u, Du, \ldots, D^m u) D^\alpha ((t - x_n)^m u) dx = 0. \tag{7}$$

Очевидно, что

$$D^{\alpha}((t-x_n)^m u) = (t-x_n)^m D^{\alpha} u + \sum_{i=1}^{i} K_{ijm} (t-x_n)^{m-i} D_{x_n}^{j-i} D_{x'}^{\beta} u,$$

$$x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}), \ |\beta| + j = m, \ |D_{x_n}^{j-i} D_{x'}^{\beta} u| \leqslant |D^m u|.$$

С учетом этого из (7), благодаря условиям (2), (3), находим

$$\nu_1 \int\limits_{\Omega_t} |D^m u|^p (t-x_n)^m dx \leqslant \nu_2 \int\limits_{\Omega_t} \sum_{j=1}^{m} C_j |D^{m-j} u| (t-x_n)^{m-j} |D^m u|^{p-1} dx, \quad (8)$$

где $C_j = \sum\limits_{l=1}^{m} |K_{jlm}|$. Применяя неравенство Гельдера к правой части неравенства (8) и пользуясь определением λ_p, имеем

$$\int\limits_{\Omega_t} \sum_{j=1}^{m} C_j |D^{m-j} u| (t-x_n)^{m-j} |D^m u|^{p-1} dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} \left(\int\limits_{\Omega_t} C_j (t-x_n)^{m-j} |D^{m-j} u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\Omega_t} C_j (t-x_n)^{m-j} |D^m u|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} \left(\int\limits_{\Omega_t} C_j (\lambda_p(x_n))^{-jp} |D^m u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\Omega_t} C_j (t-x_n)^{m-j} |D^m u|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} C_j \mathscr{A}_j(t) \int\limits_{\Omega_t} |D^m u|^p (t-x_n)^{m-j} dx. \quad (9)$$

Обозначим

$$I_s(t) = \int\limits_{\Omega_t} (t-x_n)^s |D^m u|^p dx.$$

Тогда из неравенств (8) и (9) следует, что

$$I_m(t) \leqslant \nu_3 \sum_{j=1}^{m-1} C_j \mathscr{A}_j(t) I_{m-j}(t) + \nu_3 C_m \mathscr{A}_m(t) I_0(t). \quad (10)$$

В силу неравенства Гельдера при $j \neq m$

$$I_{m-j}(t) \leqslant (I_m(t))^{\frac{m-j}{m}} (I_0(t))^{\frac{j}{m}}. \quad (11)$$

Следовательно, из (10) получаем

$$I_m(t) \leqslant \nu_3 \sum_{j=1}^{m-1} C_j \mathscr{A}_j(t) (I_m(t))^{\frac{m-j}{m}} (I_0(t))^{\frac{j}{m}} + \nu_3 C_m \mathscr{A}_m(t) I_0(t). \quad (12)$$

К первому слагаемому справа в неравенстве (12) применим неравенство Юнга с параметром $\varepsilon > 0$, выбирая его так, что

$$1 - \sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon^{\frac{m}{m-j}} \frac{(m-j)}{m} > 0.$$

После элементарных преобразований это дает

$$I_m(t) \leqslant \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{m-1} (\nu_3 C_j \mathscr{A}_j(t) \varepsilon^{-1})^{m/j} \frac{j}{m} + \nu_3 C_m \mathscr{A}_m(t) \right) I_0(t)}{1 - \sum\limits_{j=1}^{m-1} \varepsilon^{\frac{m}{m-j}} \frac{(m-j)}{m}},$$

или

$$I_m(t) \leqslant \Phi(t) I_0(t). \quad (13)$$

В силу (11) при $j = m - 1$ имеем

$$I_1(t) \leqslant (I_m(t))^{1/m} (I_0(t))^{(m-1)/m}. \tag{14}$$

Таким образом, из (13) и (14) находим

$$I_1(t) \leqslant (\Phi(t))^{1/m} I_0(t). \tag{15}$$

Замечая теперь, что

$$\frac{d}{dt} I_1(t) = I_0(t),$$

из (15) получаем

$$I_1(t) \leqslant (\Phi(t))^{1/m} \frac{dI_1(t)}{dt}.$$

Интегрируя это неравенство от t_1 до t_2; $t_1 < t_2$, получаем

$$I_1(t_1) \leqslant \exp\left(-\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{(\Phi(t))^{1/m}}\right) I_1(t_2). \tag{16}$$

Учитывая теперь (15) и неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega_\tau} |D^m u|^p dx d\tau = \int_{\Omega_{t_1}} (t_1 - x_n) |D^m u|^p dx \geqslant \frac{t_1}{2} \int_{\Omega_{t_1/2}} |D^m u|^p dx,$$

из (16) получаем

$$I_0(t_1/2) \leqslant \frac{2}{t_1} (\Phi(t_2))^{1/m} \exp\left(-\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{(\Phi(t))^{1/m}}\right) I_0(t_2),$$

что и требовалось доказать.

Приведем примеры. Пусть $\Omega = \{x \in R^n,\ x_n > 0,\ |x'| < f(x_n)\}$, где $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, а функция $f(x_n)$ — положительная монотонно неубывающая непрерывная функция. Тогда в силу [8]

$$\lambda_p(t) = \frac{c(p,\ n)}{f(t)},$$

и следовательно, неравенство (6) примет вид

$$\int_{\Omega_{t_1/2}} |D^m u|^p dx \leqslant \frac{2}{t_1} \beta f(t_2) \exp\left(-\frac{1}{\beta} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{f(t)}\right) \int_{\Omega_{t_2}} |D^m u|^p dx, \tag{17}$$

где

$$\beta = \beta(p,\ n,\ m) = \min_{\varepsilon} \frac{\left(\left(\sum_{j=1}^{m-1} \nu_3 C_j \varepsilon^{-1}\right)^{\frac{m}{j}} \frac{j}{m} + \nu_3 C_m\right) c(p,\ n)}{1 - \sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon^{\frac{m}{m-j}} \frac{(m-j)}{m}}.$$

Если, в частности, $f(x_n) \equiv h = \mathrm{const} > 0$, то из оценки (17) следует, что

$$\int_{\Omega_{t_1/2}} |D^m u|^p dx \leqslant \frac{2}{t_1} \beta \exp\left(-\frac{1}{h\beta}(t_2 - t_1)\right) \int_{\Omega_{t_2}} |D^m u|^p dx.$$

Отметим, что результаты данной работы легко обобщаются на более широкие классы k-допустимых областей (см. [8]) и на более широкие классы уравнений.

1. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // Успехи мат. наук.— 1983.— 38, № 2.— С. 3—70.
2. *Horgan C. O.* Resent derelopment concerning Saint-Venanat's principle // Adv. Appll. Mech.— 1983.— 23.— P. 179—269.

3. *Ландис Е. М.* О поведении решений эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях // Тр. Моск. мат. об-ва.— 1974.— **31.**— С. 35—58.
4. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы // Записки научн. семинаров ЛОМИ.— 1982.— **115.**— С. 114—125.
5. *Тавхелидзе И. Н.* Аналог принципа Сен-Венана для полигармонического уравнения и его приложения // Мат. сб.— 1982.— **118,** № 2.— С. 236—252.
6. *Шишков А. Е.* Качественные свойства обобщенных решений квазилинейных дивергентных эллиптических и параболических уравнений.— Киев, 1986.— 56 с.— (Препр. АН УССР. Ин-т математики; 86.29).
7. *Bernis F.* Compactness of the support for some nonlinear elliptic problems of arbitrary order in dimension *n* // Comm. Part. Differ. Equat.— 1984.— **9,** N 3.— P. 271—312.
8. *Миклюков В. М.* Об асимптотических свойствах субрешений квазилинейных уравнений эллиптического типа и отображение с ограниченным искажением // Мат. сб.— 1980.— **111,** № 1.— С. 42—66.

Ин-т прикл. математики и
механики АН Украины, Донецк

Получено 25.12.91